

**Міністерство освіти і науки України  
Донбаська державна машинобудівна академія**

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ  
до практичних занять та самостійної роботи  
з дисципліни  
«Вибрані питання теорії диференціальних рівнянь»  
для студентів спеціальності  
014 «Середня освіта (Математика)»**

Рекомендовано:  
Вченою Радою факультету машинобудування  
Протокол № 01-23/08 від «28» серпня 2023 р.

**2023-2024 навчальний рік**

**Міністерство освіти і науки України  
Донбаська державна машинобудівна академія**

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**  
**до практичних занять та самостійної роботи**  
**з дисципліни**  
**«Вибрані питання теорії диференціальних рівнянь»**  
для студентів спеціальності  
014 «Середня освіта (Математика)»

Затверджено  
на засіданні  
методичної ради  
Протокол № 8 від 20.05.2021

**Краматорськ 2021**

## УДК

Методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи з дисципліни «**Вибрані питання теорії диференціальних рівнянь**» для студентів спеціальності 014 «Середня освіта (Математика)»/ Укл.: М.В. Дзюба – Краматорськ: ДДМА, 2021. – 50 с.

*Навчальний посібник містить у стислому вигляді огляд загальних теоретичні і практичних відомостей, наведені зразки завдань, програма дисципліни.*

Укладач М.В. Дзюба.

Відпов. за вип. В. М. Астахов, доц.



## ЗМІСТ

1 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ	4
2 ЗАВДАННЯ ДЛЯ ОРГАНІЗАЦІЇ АУДИТОРНОЇ ТА САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ	6
3 ЗРАЗКИ ЗАВДАНЬ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ	20
4 ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ	31
Література	49

# 1 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАНН

1. Узагальнення диференціальних рівнянь I-го порядку.
2. Застосування диференціальних рівнянь I-го порядку.
3. Узагальнення диференціальних рівнянь вищих порядків.
4. Застосування диференціальних рівнянь вищих порядків.
5. Узагальнення систем диференціальних рівнянь.
6. Постановка крайової задачі.
7. Метод кінцевих різниць для лінійних диференціальних рівнянь другого порядку
8. Метод кінцевих різниць для нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку
9. Постановки крайових задач для рівнянь з частинними похідними.
10. Гармонійні функції та єдиність розв'язку задачі Діріхле для рівняння Лапласа.
11. Різницеві схеми для рівняння Лапласа.
12. Метод сіток для розв'язування задачі Діріхле.
13. Ітераційний процес Лібмана.
14. Про предмет теорії коливань
15. Нелінійні елементи й нелінійні характеристики
16. Фундаментальні ефекти, до яких приводить нелінійність
17. Нелінійний осцилятор як узагальнена модель теорії коливань
18. Нелінійний осцилятор: фазовий портрет
19. Приклади автоколивальних систем

## 2 ЗАВДАННЯ ДЛЯ ОРГАНІЗАЦІЇ АУДИТОРНОЇ ТА САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

### Тема: Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Розв'яжіть диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними

**Задача 1.** Перевірити чи є функція розв'язком даного диференціального рівняння:

1.  $xy' = 2y, y = 5x^2$ .

2.  $y'' = x^2 + y^2, y = 1/x$ .

**Задача 2.** Розв'яжіть диференціальне рівняння:

1.  $y' = x^3 + x^2 - 2x - 8$

2.  $y' = x^3 - x^2 - 2x + 8$

3.  $y' = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$

**Задача 3.** Розв'яжіть диференціальне рівняння з відокремленими змінними.

1.  $dy = \cos 3x \cos x dx$

2.  $dy = \cos x \cos 4x dx$

3.  $dy = \cos 7x \cos 5x dx$

**Задача 4.** Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння з відокремлюваними змінними.

1.  $ds = (4t - 3)dt, s(0) = 0$ .

2.  $ds = (2t^2 - 5)dt, s(1) = -4$ .

3.  $x dx = dy, y(1) = 0$ .

**Задача 5.** Розв'яжіть диференціальне рівняння:

1.  $y'(1 + x^2) = \sqrt[3]{y^2}$

2.  $y'(1 - x^2) = y^{10}$

3.  $y' \cos^2 x - \cos^2 y = 0$

**Задача 6.** Розв'яжіть диференціальне рівняння:

1.  $3(x^2 y^2 + x^2)dx + (2y - x^3 y)dy = 0$

2.  $x e^y y' = e^{2y} + 1$

3.  $y(4 + x^2)dy + \sqrt{1 - y^2} dx = 0$

4.  $y' = x 4^{x+y}$

5.  $(x^2 - y^2 x^2)dx + (y^2 - x^2 y^2)dy = 0$

6.  $\sqrt{1 - x^2} dy - y dx = 0$

7.  $(1 - y^2)dx - \sqrt{1 - x^2} dy = 0$

8.  $y(1 + x^2)y' + x(1 + y^2) = 0$

9.  $\cos y e^x dx + (1 + e^{2x}) \sin y dy = 0$

$$10. xy' - 4 = y^2$$

**Тема: Однорідні диференціальні рівняння.**

$$1. 2y' = \frac{y^2}{x^2} + 2\frac{y}{x} - 4$$

$$2. y' = \frac{x^2}{y^2} + 2\frac{y}{x}$$

$$3. (2y - x)dx = (3x + y)dy$$

$$4. 2y' = e^{y/x} + 2y/x$$

$$5. (x + y)dx + (y - 2x)dy = 0$$

$$6. (x^2 + y^2)dx + x^2dy = 0$$

$$7. (y - 2x)dx + (y + 2x)dy = 0$$

$$8. 2xydy = (x^2 - y^2)dx$$

$$9. (3y^2 + 2x^2)dx = (y^2 - x^2)dy$$

$$10. xy' - y = x \operatorname{ctg} \frac{y}{x}$$

$$11. y' = \frac{x + 2y}{x - 4y}$$

$$12. y' = \frac{x + 2y}{x - y} - 1$$

**Тема: Лінійні диференціальні рівняння.**

Знайти загальні або частинні розв'язки однорідних диференціальних рівнянь:

$$1. y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$$

$$2. y' + \frac{y}{x} = x^2$$

$$3. (x^2 + 1)y' + 4xy = 3$$

$$4. (1 - x)(y' + y) = e^{-x}$$

$$5. xy' - 2y = 2x^4$$

$$6. y' = 2x(x^2 + y)$$

$$7. y' - y = e^{-x}$$

$$8. xy' + y = -xe^{-x^2}$$

$$9. \cos y dx = (x + 2 \cos y) \sin y dy$$

$$10. x^2 y' + xy = -1$$

**Тема: Диференціальні рівняння вищих порядків**

**Диференціальні рівняння, які допускають пониження порядку.**

1. Розв'язати рівняння:

$$1. y'' = e^{6x} + \sin 8x$$

$$2. y'' = e^{5x} + \cos 7x$$



3.  $y'' = e^{4x} + \sin 5x$

2. Розв'язати рівняння:

1.  $y'' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

2.  $y''(4 + x^2) = 2$

3.  $y'' = 4 + \cos^2 x$

4.  $y'' = 2x \operatorname{arctg} x$

3. Проінтегруйте рівняння другого порядку, використовуючи заміну  $y' = z(x)$ .

1.  $(9 + x^2)y'' + 2xy' = 0$

2.  $xy'' = y' + x$

3.  $y'' - 2y' \operatorname{ctg} x = \cos x$

4.  $y''(x^2 + x) = (4x + 2)y'$

5.  $y'' - 2 \operatorname{ctg} x \cdot y' = \sin^3 x$

6.  $(2 + x^2)y'' + 2xy' = x^2$

7.  $xy'' + x(y')^2 - 2y' = 0$

8.  $y'' \sin x - y' \cos x = \sin x$

**Тема: Лінійні диференціальні рівняння із сталими коефіцієнтами.**

Розв'язати однорідні диференціальні рівняння другого порядку:

1.  $y'' + y' - 2y = 0$

2.  $y'' - 4y' = 0$

3.  $2y'' - y' - y = 0$

4.  $y'' + 6y' + 13y = 0$

5.  $2y'' - 3y' - 5y = 0$

6.  $y'' - 9y = 0$

7.  $y'' - 2y' - 3y = 0$

8.  $4y'' + 4y' + 5y = 0$

9.  $4y'' - 8y' + 5y = 0$

10.  $y'' - 4y' + 5y = 0$

11.  $y'' - 4y' + 29y = 0$

12.  $4y'' - 4y' + y = 0$

13.  $y'' + 7y' + 12y = 0$

14.  $y'' + 2y' - 8y = 0$

**Тема: Нелінійні диференціальні рівняння.**

**Задача 1.** Знайдіть загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння.

$$1. y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$$

$$2. y^{(4)} + 16y = 0$$

$$3. y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$$

$$4. y^{(4)} + 5y'' + 4y = 0$$

**Задача 2.** Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння

$$1. y''' + 3y'' + 2y' = -1 - x^2$$

$$2. y''' - y'' = 6x^2 + 3x$$

$$3. y''' - y' = x^2 + x$$

$$4. y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = 2x$$

**Задача 3.** Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння

$$1. y''' - 4y'' + 5y' - 2y = (16 - 12x)e^{-x}$$

**Задача 4.** Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння

$$1. y'' + 2y' = 4e^x (\sin x + \cos x).$$

$$2. y'' - 4y' + 4y = -e^{2x} \sin 6x.$$

$$3. y'' + 2y' = -2e^x (\sin x + \cos x).$$

$$4. y'' + y = 2 \cos 7x + 3 \sin 7x.$$

**Тема:** Системи диференціальних рівнянь

**Задача 1.** Розв'яжіть систему диференціальних рівнянь

$$1. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y \\ \frac{dy}{dt} = -4x \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = -4x + y \end{cases}$$

**Задача 2.** Розв'яжіть систему диференціальних рівнянь методом виключення. У кожній системі  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ ,  $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ .

$$1. \begin{cases} \dot{x} = 4x + 3y + t, \\ \dot{y} = -2x - y \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \dot{x} = x - 2y + e^t, \\ \dot{y} = x + 4y + 1 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \dot{x} = x - y + \cos 3t, \\ \dot{y} = x - 3y \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = x - y + t^2 - 1, \\ \dot{y} = 5x + 5y - 2 \end{cases}$$

**Задача 3.** Розв'яжіть методом Ейлера систему однорідних

диференціальних рівнянь  $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases}$  якщо:

1.  $a_{11} = 3, \quad a_{12} = 1, \quad a_{21} = 2, \quad a_{22} = 4.$

2.  $a_{11} = 4, \quad a_{12} = 1, \quad a_{21} = -1, \quad a_{22} = 2.$

**Тема:** Задачі на складання диференціальних рівнянь

Складіть диференціальне рівняння та розв'яжіть його.

1. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю  $v = t^2$ . Визначте закон руху тіла, якщо за перші 3 с тіло пройшло шлях 10 м.

2. Знайдіть функцію, графік якої проходить через точку  $A(4;3)$ , якщо кутовий коефіцієнт дотичної до графіка цієї функції в будь-якій точці області її визначення обчислюється за формулою  $k = x^{-1/2}$ .

3. Матеріальна точка масою  $m$  рухається під дією сили  $F$  вздовж осі  $OX$  протягом часу  $t$ . Запишіть диференціальне рівняння руху матеріальної точки, якщо сила, яка діє на точку, - величина стала.

4. Вздовж осі  $OX$  під дією сили  $F$  рухається матеріальна точка масою  $m$  протягом часу  $t$ . Запишіть диференціальне рівняння руху точки, якщо відомо, що сила періодично змінюється за законом  $F = F_0 \sin \omega t$ .

5. Матеріальна точка здійснює гармонічне коливання з частотою  $\omega = 2$ . Знайдіть її координату і швидкість у момент часу  $t = \pi/8$ , якщо при  $t_0 = 0$  координата і швидкість відповідно дорівнювали  $x(0) = 2, v(0) = 0$ .

6. Швидкість літального апарата змінюється за законом  $v(t) = 2/5102t$  м/с. Визначте закон руху апарата, якщо за перші 2 с він пролетів шлях 4 м.

7. Точка рухається по прямій з прискоренням  $a$ . У початковий момент  $t = 0$  точка має координату  $x$  і швидкість  $v$ . Знайдіть координату  $x(t)$  точки як функцію від часу.

8. 3 гвинтівки вистрілили вгору. Знайдіть закон руху кулі, вважаючи, що прискорення земного тяжіння  $10 \text{ м/с}^2$ , швидкість вильоту кулі з гвинтівки  $800 \text{ м/с}$  (опором повітря знехтувати).

9. Швидкість розмноження бактерій пропорційна їхній кількості. У початковий момент при  $t = 0$  було 100 бактерій, а за 3 год їхня кількість подвоїлася. Знайдіть залежність кількості бактерій від часу. У скільки разів збільшиться кількість бактерій за 9 год?

10. За рік кількість бактерій подвоюється, а швидкість розмноження прямо пропорційна наявній кількості бактерій. Складіть диференціальне рівняння розмноження бактерій.

**Тема:** Крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь

**Основні завдання для засвоєння навчального матеріалу та поточного контролю.**

1. Що називається звичайним диференціальним рівнянням?

2. Сформулюйте постановку крайової задачі для звичайного диференціального рівняння. Що є її розв'язком? У якому вигляді подається розв'язок чисельним методом?

3. В чому суть методу кінцевих різниць для лінійної крайової задачі? Які він має оцінки погрешності?

4. Розв'яжіть методом кінцевих різниць крайову задачу

$y'' + x^2y' + (1 - x)y = x/(x^2 + 3)$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 0$ , з числом розбиття відрізка  $n=25$ . Побудуйте графік отриманого розв'язку.

5. Розв'яжіть методом кінцевих різниць нелінійне диференціальне рівняння другого порядку  $y'' - 2xy' - 2y^2 = -4x$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 3.7$  з числом розбиття відрізка  $n = 20$ . Побудуйте графік отриманого розв'язку.

**Питання та завдання для самоконтролю та самостійної роботи**

1. Розв'язати методом кінцевих різниць крайову задачу  $x^2y'' + xy' = 1$ ,  $y(1) = 0$ ,  $y(1.4) = 0,05661$  з числом розбиття відрізка  $n = 10$ .

2. Розв'язати методом кінцевих різниць крайову задачу  $y'' = (1 - xy)/x^2$ ,  $y(1) = 0$ ,  $y(1.4) = 0,05661$ , з числом розбиття відрізка  $n=10$ .

**Тема: Метод характеристик (метод поширення хвиль)**

**Основні завдання для засвоєння навчального матеріалу та поточного контролю.**

1. Проінтегрувати ДРЧП:

а)  $u_{xx} - 4u_{xy} + 3u_{yy} - 2u_x + 6u_y(x, y) = 0$ ;

б)  $u_{xx} + 6u_{xy} + 5u_{yy}(x, y) = 0$ ;

в)  $u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_y(x, y) = 0$ ;

г)  $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} - 2y u_y(x, y) = 0$ ,  $xy > 0$ ;

г)  $3u_{xx} - 5u_{xy} - 2u_{yy} + 3u_x + u_y(x, y) = 2$ ;

д)  $x^2 u_{xx} - 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} + x u_x + y u_y(x, y) = 0$ ,  $y \neq 0$ ;

е)  $u_{xy} - 2u_x - 3u_y + 6u(x, y) = 2e^{x+y}$ .

2. Знайти розв'язки задач Коші:

а)  $u_{xx} + 2\cos x u_{xy} - \sin^2 x u_{yy} - \sin x u_y(x, y) = 0$ ,

$u(x, \sin x) = \varphi(x)$ ,  $u_y(x, \sin x) = \psi(x)$ ;

б)  $4y^2 u_{xx} + 2(1 - y^2) u_{xy} - u_{yy} - \frac{2y}{1 + y^2} (2u_x - u_y) = 0$ ,  $u = u(x, y)$ ,

$u(x, 0) = \varphi(x)$ ,  $u_y(x, 0) = \psi(x)$ ;

$$\text{в) } x^2 u_{xx} - 2xy u_{xy} - 3y^2 u_{yy} = 0, \quad u = u(x, y),$$

$$u(x, 1) = x, \quad u_y(x, 1) = 1;$$

$$\text{г) } u_{xx} + 4u_{xy} - 5u_{yy} + u_x - u_y(x, y) = 0,$$

$$u(x, 0) = 3x, \quad u_y(x, 0) = 0;$$

$$\text{г) } u_{tt} = u_{xx} - bu_t + cu(t, x) + f(t, x), \quad b, c = \text{const} \geq 0,$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x)$$

(вказівка: використати метод введення нової незалежної змінної).

3. Розв'язати задачі Коші для тривимірного хвильового рівняння

$$u_{tt} = a^2 \Delta u(t, x, y, z), \quad t > 0, \quad (x, y, z) \in E_3,$$

з початковими умовами:

$$\text{а) } u(0, x, y, z) = \begin{cases} u_0 = \text{const}, & r \leq r_0, \\ 0, & r > r_0, \end{cases} \quad u_t(0, x, y, z) = 0;$$

$$\text{б) } u(0, x, y, z) = 0, \quad u_t(0, x, y, z) = \begin{cases} u_0 = \text{const}, & r \leq r_0, \\ 0, & r > r_0, \end{cases}$$

$$\text{де } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad r_0 = \text{const} > 0.$$

4. Із розв'язку задачі Коші

$$u_{tt} = a^2 \Delta u \pm c^2 u(t, x, y) + f(t, x, y), \quad t > 0, \quad (x, y) \in E_2,$$

$$u(0, x, y) = \varphi(x, y), \quad u_t(0, x, y) = \psi(x, y), \quad (x, y) \in E_2,$$

методом спуску одержати розв'язок задачі

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \pm c^2 u(t, x) + f(t, x), \quad t > 0, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

5. Довести, що

а) для існування в рівнянні

$$u_{tt}(t, M) = a^2 \Delta u(t, M) + cu(t, M), \quad M = M(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{плоских хвиль}$$

$$u(t, M) = f\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i - bt\right), \quad \text{де } \sum_{i=1}^n a_i^2 = 1, \quad \text{довільної форми, які поширюються зі}$$

швидкістю  $a$  в довільних напрямках, необхідно й досить, щоб  $c = 0$ ;

б) при  $c \neq 0$  в рівнянні (25) існують плоскі хвилі довільних напрямків поширення і довільних швидкостей, за виключенням  $a$ , однак їх форма не може бути довільною, а є розв'язком диференціального рівняння

$$(a^2 - b^2) f''(Q) + cf(Q) = 0, \quad Q = \sum_{i=1}^n a_i x_i - bt.$$

**Питання та завдання для самоконтролю та самостійної роботи**

6. Шляхом суперпозиції плоских хвиль із фронтом, паралельним осі  $Oz$ , вигляду  $f(at - \alpha x - \beta y)$ , де  $\alpha$  і  $\beta$  – напрямні косинуси нормалі до фронту хвилі, одержати циліндричні хвилі

$$\psi(t, r) = \int_{at-r}^{at+r} \frac{f(\xi) d\xi}{\sqrt{r^2 - (at - \xi)^2}},$$

де  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Знайти явний вираз для  $\psi(t, r)$  при умові, що

$$f(\xi) = \begin{cases} 0, & -\infty < \xi < -r_0, \\ u_0 = \text{const}, & -r_0 \leq \xi \leq r_0, \\ 0, & r_0 < \xi < +\infty. \end{cases}$$

**Вказівка.** Покласти  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $\alpha = \cos \theta$ ,  $\beta = \sin \theta$ , і проінтегрувати по  $\theta$  в межах від 0 до  $\pi$ , після чого зробити заміну змінної інтегрування.

**Тема: Числові методи розв'язування рівняння Лапласа.**

**Основні завдання для засвоєння навчального матеріалу та поточного контролю.**

1. Знайти функцію  $u(x, y)$ , гармонійну в області  $G = \{(x, y) : x > 0, y > 0, x + y < 1\}$ , яка на межі  $\Gamma$  цієї області задовольняє умову  $u|_{\Gamma} = x^2 + y^2$ .

2. Знайти функцію  $u(x, y)$ , гармонійну в області  $G = \{(x, y) : x > 0, y > 0, x + y < 2\}$ , яка на межі  $\Gamma$  цієї області задовольняє умову  $u|_{\Gamma} = x^2 + y^2$ .

**Питання та завдання для самоконтролю та самостійної роботи**

1. Знайти функцію  $u(x, y)$ , гармонійну в області  $G = \{(x, y) : x > 0, y > 0, x + y < 3\}$ , яка на межі  $\Gamma$  цієї області задовольняє умову  $u|_{\Gamma} = x^2 + y^2$ .

**ТЕМА: Числові методи розв'язування задачі Діріхле.**

1. Методом Монте-Карло знайти значення  $u(0,4;0,2)$  гармонійної в області  $G = \{(x, y) : x > 0, y > 0, x + y < 1\}$  функції  $u(x, y)$ , яка на межі  $\Gamma$  цієї області задовольняє умову  $u|_G = x^2 + y^2$ .

2. Методом Монте-Карло знайти значення  $u(0,8;0,1)$  гармонійної в області  $G = \{(x, y) : x > 0, y > 0, x + y < 2\}$  функції  $u(x, y)$ , яка на межі  $\Gamma$  цієї області задовольняє умову  $u|_G = x^2 + y^2$ .

**Питання та завдання для самоконтролю та самостійної роботи**

1. Методом Монте-Карло знайти значення  $u(0,1;0,1)$  гармонійної в області  $G = \{(x, y) : x > 0, y > 0, x + y < 4\}$  функції  $u(x, y)$ , яка на межі  $\Gamma$  цієї області задовольняє умову  $u|_G = x^2 + y^2$ .

**ТЕМА: Числові методи розв'язування рівняння теплопровідності.**

**Основні завдання для засвоєння навчального матеріалу та поточного контролю.**

1. Розв'язати методом сіток рівняння  $\partial^2 u / \partial x^2 = \partial u / \partial t$  з початковими та крайовими умовами

$$\{u(x, 0) = 4x(-x + 1), 0 \leq x \leq 1,$$

$$\{u(0, t) = 0, u(1, t) = 0, 0 \leq t \leq \infty.$$

2. Розв'язати методом алгебраїчної прогонки рівняння

$$\partial^2 u / \partial x^2 = \partial u / \partial t$$

з початковими та крайовими умовами

$$\{u(x, 0) = 4x(x + 1), 0 \leq x \leq 1,$$

$$\{u(0, t) = 0, u(1, t) = 0, 0 \leq t \leq \infty.$$

**Питання та завдання для самоконтролю та самостійної роботи**

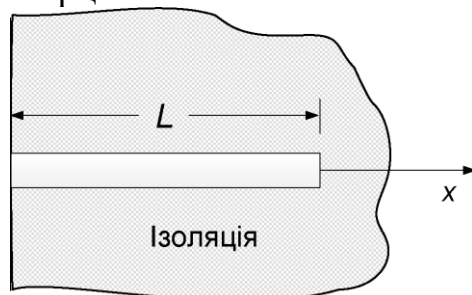
1. Розв'язати методом сіток рівняння  $\partial^2 u / \partial x^2 = \partial u / \partial t$  з початковими та крайовими умовами

$$\{u(x, 0) = 4x(x + 3), 0 \leq x \leq 3,$$

$$\{u(0, t) = 0, u(3, t) = 0, 0 \leq t \leq \infty.$$

**ТЕМА: Деякі числові методи розв'язування рівняння теплопровідності та хвильового рівняння.**

1. Стержень довжиною  $L$  з постійним по довжині перетином занурений в ізолюючий матеріал так, що з навколишнім середовищем взаємодіє тільки його лівий торець (рис.). У початковий момент часу весь стержень має рівноважну температуру  $T = 0$ , а його лівий торець стрибком набуває температури  $T = 100^\circ\text{C}$ . Потрібно визначити, як буде змінюватися за часом температура в точках стержня, розташованих на різних відстанях від його лівого торця.



**Тема: Метод прямих та його модифікація для рівняння Пуассона.**

**Основні завдання для засвоєння навчального матеріалу та поточного контролю.**

1. Розв'язати методом прямих рівняння

$$\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = x + y$$

в області  $Q = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$ , якщо

$$\{u(x, 0) = 0, u(x, 2) = x + 2, 0 \leq x \leq 2,$$

$$\{u(0, y) = y, u(2, y) = 2y, 0 \leq y \leq 2.$$

2. Розв'язати методом прямих рівняння  $\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = x + y$  в області  $Q = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3\}$ , якщо

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0, u(x, 3) = x + 3, 0 \leq x \leq 3, \\ u(0, y) = y, u(3, y) = 3y, 0 \leq y \leq 3. \end{cases}$$

**Питання та завдання для самоконтролю та самостійної роботи**

1. Розв'язати методом прямих рівняння  $\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = x + y$  в області  $Q = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ , якщо

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0, u(x, 1) = x + 1, 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, y) = y, u(1, y) = y, 0 \leq y \leq 1. \end{cases}$$



### 3 ЗРАЗКИ ЗАВДАНЬ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ

#### КОНТРОЛЬ 1

##### Варіант 1

1. Розв'яжіть систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \text{ якщо:}$$

$$a_{11} = 1, \quad a_{12} = 2, \quad a_{21} = 4, \quad a_{22} = 3$$

2. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння.

$$dy = \cos 3x \cos x dx.$$

3. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння.

$$ds = (4t - 3)dt, \quad s(0) = 0.$$

4. Знайдіть загальний розв'язок лінійного рівняння I порядку.

$$y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}.$$

5. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння II порядку.

$$y'' = e^{6x} + \sin 8x.$$

6. Знайдіть загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння II порядку.

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

##### Варіант 2

1. Розв'яжіть систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \text{ якщо:}$$

$$a_{11} = 2, \quad a_{12} = 5, \quad a_{21} = -1, \quad a_{22} = 4$$

2. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння.

$$dy = \cos x \cos 4x dx.$$

3. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння.

$$ds = (2t^2 - 5)dt, \quad s(1) = -4.$$

4. Знайдіть загальний розв'язок лінійного рівняння I порядку.

$$y' + 2xy = -2x^3.$$

5. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння II порядку.

$$y'' = e^{5x} + \cos 7x.$$

6. Знайдіть загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння II порядку.

$$y'' - 4y' = 0.$$

### Варіант 3

1. Розв'яжіть систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \text{ якщо:}$$

$$a_{11} = 1, a_{12} = -1, a_{21} = -4, a_{22} = 1$$

2. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння.

$$dy = \cos 7x \cos 5x dx.$$

3. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння.

$$x dx = dy, y(1) = 0.$$

4. Знайдіть загальний розв'язок лінійного рівняння I порядку.

$$y' + xy = -x^3.$$

5. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння II порядку.

$$y'' = e^{4x} + \sin 5x.$$

6. Знайдіть загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння II порядку.

$$2y'' - y' - y = 0.$$

### Варіант 4

1. Розв'яжіть диференціальне рівняння з відокремленими змінними .

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \text{ якщо:}$$

$$a_{11} = 0, a_{12} = 2, a_{21} = 2, a_{22} = 0$$

2. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння. .

$$dy = \sin 5x \cos 3x dx.$$

3. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння.

$$x dx = y dy, y(2) = 1.$$

4. Знайдіть загальний розв'язок лінійного рівняння I порядку.

$$y' + y \cdot \operatorname{ctg} x = \sin x.$$

5. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння II порядку .

$$y'' = e^{2x} + \cos 4x.$$

6. Знайдіть загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння II порядку.  $y'' + 6y' + 13y = 0.$

### Варіант 5

1. Розв'яжіть систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \text{ якщо:}$$

$$a_{11} = 1, \quad a_{12} = 2, \quad a_{21} = 4, \quad a_{22} = 3$$

2. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння.

$$dy = \sin 3x \sin 2x dx.$$

3. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння.

$$x^2 dx + y dy = 0, \quad y(0) = 1.$$

4. Знайдіть загальний розв'язок лінійного рівняння I порядку.

$$y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3.$$

5. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння II порядку.

$$y'' = e^{3x} + \sin 9x.$$

6. Знайдіть загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння II порядку.

$$2y'' - 3y' - 5y = 0.$$

#### Варіант 6

1. Розв'яжіть систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \text{ якщо:}$$

$$a_{11} = 2, \quad a_{12} = 5, \quad a_{21} = -1, \quad a_{22} = 4$$

2. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння.

$$dy = \sin 3x \cos x dx.$$

3. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння.

$$(t-1)dt + s ds = 0, \quad s(2) = 0.$$

4. Знайдіть загальний розв'язок лінійного рівняння I порядку.

$$y' + \frac{4y}{x} = e^{-x}.$$

5. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння II порядку.

$$y'' = e^{7x} + \cos 5x.$$

6. Знайдіть загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння II порядку.

$$y'' - 9y = 0.$$

#### Варіант 7

1. Розв'яжіть систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \text{ якщо:}$$

$$a_{11} = 1, a_{12} = -1, a_{21} = -4, a_{22} = 1$$

2. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння. .

$$dy = \sin 9x \cos x dx .$$

3. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння.

$$2 \frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0, y(1) = \sqrt{2} .$$

4. Знайдіть загальний розв'язок лінійного рівняння I порядку.

$$y' + y \cdot \operatorname{ctgx} = \cos x .$$

5. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння II порядку.

$$y'' = e^{8x} + \sin 3x .$$

6. Знайдіть загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння II порядку.

$$y'' - 2y' - 3y = 0 .$$

### Варіант 8

1. Розв'яжіть систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \text{ якщо:}$$

$$a_{11} = 0, a_{12} = 2, a_{21} = 2, a_{22} = 0$$

2. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння.

$$dy = \cos 2x \cos 3x dx .$$

3. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння.

$$\frac{dy}{2x} + \frac{dx}{y} = 0, y(0) = 2 .$$

4. Знайдіть загальний розв'язок лінійного рівняння I порядку.

$$y' - y \cdot \operatorname{ctgx} = \frac{1}{\sin x} .$$

5. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння II порядку.

$$y'' = e^{3x} + \cos 2x .$$

6. Знайдіть загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння II порядку.

$$4y'' + 4y' + 5y = 0 .$$

### Варіант 9

1. Розв'яжіть систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \text{ якщо:}$$

$$a_{11} = 2, \quad a_{12} = 5, \quad a_{21} = -1, \quad a_{22} = 4$$

2. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння.

$$dy = \sin 5x \sin 7x dx.$$

3. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння.

$$2s dt = t ds, \quad s(1) = 2.$$

4. Знайдіть загальний розв'язок лінійного рівняння I порядку.

$$y' - \frac{y}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{x^2+1}.$$

5. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння II порядку.

$$y'' = e^{9x} + \sin 4x.$$

6. Знайдіть загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння II порядку.

$$4y'' - 8y' + 5y = 0.$$

*Варіант 10*

1. Розв'яжіть систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \text{ якщо:}$$

$$a_{11} = 2, \quad a_{12} = 5, \quad a_{21} = -1, \quad a_{22} = 4$$

2. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння.

$$dy = \sin 4x \cos 2x dx.$$

3. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння.

$$x^2 dy - y^2 dx = 0, \quad y(0.2) = 1.$$

4. Знайдіть загальний розв'язок лінійного рівняння I порядку.

$$y' - \frac{y}{x} = x \sin x.$$

5. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння II порядку.

$$y'' = e^{5x} + \cos 6x.$$

6. Знайдіть загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння II порядку.

$$y'' - 4y' + 5y = 0.$$

*Варіант 11*

1. Розв'яжіть систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \text{ якщо:}$$

$$a_{11} = 1, a_{12} = -1, a_{21} = -4, a_{22} = 1$$

2. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння.

$$dy = \sin x \cos 9x dx.$$

3. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння.

$$x^3 dy = y^3 dx, y(\sqrt{3}) = \sqrt{2}.$$

4. Знайдіть загальний розв'язок лінійного рівняння I порядку.

$$y' + y \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}.$$

5. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння II порядку.

$$y'' = e^{4x} + \sin 6x.$$

6. Знайдіть загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння II порядку.

$$y'' - 4y' + 29y = 0.$$

*Варіант 12*

1. Розв'яжіть систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \text{ якщо:}$$

$$a_{11} = 0, a_{12} = 2, a_{21} = 2, a_{22} = 0$$

2. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння.

$$dy = \sin 3x \cos 2x dx.$$

3. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння.

$$2 \frac{dy}{dx} = 1 + x^2, y(0) = 0.$$

4. Знайдіть загальний розв'язок лінійного рівняння I порядку.

$$y' + \frac{y}{x} = e^x.$$

5. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння II порядку.

$$y'' = e^{6x} + \cos 5x.$$

6. Знайдіть загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння II порядку.

$$4y'' - 4y' + y = 0.$$

*Варіант 13*

1. Розв'яжіть систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \text{ якщо:}$$

$$a_{11} = 1, \quad a_{12} = 2, \quad a_{21} = 4, \quad a_{22} = 3$$

2. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння.

$$dy = \cos 5x \cos x dx.$$

3. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння.

$$dy + x dx = 2 dx, \quad y(1) = 1,5.$$

4. Знайдіть загальний розв'язок лінійного рівняння I порядку.

$$y' - \frac{y}{x} = e^{2x}.$$

5. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння II порядку.

$$y'' = e^{2x} + \sin 4x.$$

6. Знайдіть загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння II порядку.

$$y'' + 7y' + 12y = 0.$$

*Варіант 14*

1. Розв'яжіть систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \text{ якщо:}$$

$$a_{11} = 2, \quad a_{12} = 5, \quad a_{21} = -1, \quad a_{22} = 4$$

2. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння.

$$dy = \cos 4x \cos 3x dx.$$

3. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння.

$$x^2 dy - \frac{1}{2} y^3 dx = 0, \quad y(-1) = 1.$$

4. Знайдіть загальний розв'язок лінійного рівняння I порядку.

$$y' + \frac{2y}{x} = 4 \sin x.$$

5. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння II порядку.

$$y'' = e^{3x} + \cos 6x.$$

6. Знайдіть загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння II порядку.

$$y'' + 2y' - 8y = 0.$$

*Варіант 15*

1. Розв'яжіть систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \text{ якщо:}$$

$$a_{11} = 1, a_{12} = -1, a_{21} = -4, a_{22} = 1$$

2. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння.

$$dy = \sin 3x \sin 8x dx.$$

3. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння.

$$(t+1)ds = 2s dt, s(1) = 4.$$

4. Знайдіть загальний розв'язок лінійного рівняння I порядку.

$$y' + y \cdot \operatorname{tg} x = \cos x.$$

5. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння II порядку.

$$y'' = e^{5x} + \sin 7x.$$

6. Знайдіть загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння II порядку.

$$4y'' - 12y' + 9y = 0. \text{Варіант 16}$$

1. Розв'яжіть систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \text{ якщо:}$$

$$a_{11} = 0, a_{12} = 2, a_{21} = 2, a_{22} = 0$$

2. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння.

$$dy = \sin 6x \sin 5x dx.$$

3. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння.

$$\sqrt{x} dy + \sqrt{y} dx = 0, y(0) = 0.$$

4. Знайдіть загальний розв'язок лінійного рівняння I порядку.

$$y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}.$$

5. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння II порядку.

$$y'' = e^{8x} + \cos 4x.$$

6. Знайдіть загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння II порядку.

$$y'' + y' + y = 0.$$

Варіант 17

1. Розв'яжіть систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \text{ якщо:}$$



$$a_{11} = 1, a_{12} = 2, a_{21} = 4, a_{22} = 3$$

2. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння.

$$dy = \cos 3x \cos 7x dx.$$

3. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння.

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} + dx = \frac{dx}{\sqrt{x}}, y(0) = 1.$$

4. Знайдіть загальний розв'язок лінійного рівняння I порядку.

$$y' + y \cdot \operatorname{tg} x = \sin x.$$

5. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння II порядку.

$$y'' = e^{5x} + \sin 3x.$$

6. Знайдіть загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння II порядку.

$$y'' + 3y' + 2y = 0.$$

### Варіант 18

1. Розв'яжіть систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \text{ якщо:}$$

$$a_{11} = 2, a_{12} = 5, a_{21} = -1, a_{22} = 4$$

2. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння.

$$dy = \cos 4x \cos 9x dx.$$

3. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння.

$$\frac{1}{2} \frac{dy}{y} - dx = 0, y(0) = 3.$$

4. Знайдіть загальний розв'язок лінійного рівняння I порядку.

$$y' - 4xy = -4x^3.$$

5. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння II порядку.

$$y'' = e^{4x} + \cos 2x.$$

6. Знайдіть загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння II порядку.

$$y'' + 5y' + 4y = 0.$$

### Варіант 19

1. Розв'яжіть систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \text{ якщо:}$$

$$a_{11} = 1, a_{12} = -1, a_{21} = -4, a_{22} = 1$$

2. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння.

$$dy = \sin 7x \cos 2x dx.$$

3. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння.

$$(1+y)dx - (1-x)dy = 0, y(0) = 1.$$

4. Знайдіть загальний розв'язок лінійного рівняння I порядку.

$$y' - y \cdot \operatorname{ctgx} = 2x \sin x.$$

5. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння II порядку.

$$y'' = e^{6x} + \sin 4x.$$

6. Знайдіть загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння II порядку.

$$y'' - 7y' + 6y = 0.$$

*Варіант 20*

1. Розв'яжіть систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \text{ якщо:}$$

$$a_{11} = 0, a_{12} = 2, a_{21} = 2, a_{22} = 0$$

2. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння.

$$dy = \sin 4x \sin 12x dx.$$

3. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння.

$$2y' = y, y(0) = 1.$$

4. Знайдіть загальний розв'язок лінійного рівняння I порядку.

$$y' + e^x \cdot y = e^{2x}.$$

5. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння II порядку.

$$y'' = e^{4x} + \cos 7x.$$

6. Знайдіть загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння II порядку.

$$y'' + 9y' + 8y = 0.$$

*Варіант 21*

1. Розв'яжіть систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \text{ якщо:}$$

$$a_{11} = 1, a_{12} = 2, a_{21} = 4, a_{22} = 3$$

2. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння.

$$dy = \sin 8x \cos 2x dx.$$

3. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння.

$$s \operatorname{tg} t dt + ds = 0, s\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4.$$

4. Знайдіть загальний розв'язок лінійного рівняння I порядку.

$$y' + \frac{y}{2x} = x^2.$$

5. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння II порядку.

$$y'' = e^{5x} + \sin 7x.$$

6. Знайдіть загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння II порядку.

$$y'' - 5y' + 4y = 0.$$

Варіант 22

1. Розв'яжіть систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \text{ якщо:}$$

$$a_{11} = 2, \quad a_{12} = 5, \quad a_{21} = -1, \quad a_{22} = 4$$

2. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння.

$$dy = \sin x \sin 11x dx.$$

3. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння.

$$\operatorname{tg} x y' = 1 + y, \quad y\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}.$$

4. Знайдіть загальний розв'язок лінійного рівняння I порядку.

$$y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^2.$$

5. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння II порядку.

$$y'' = e^{6x} + \cos 8x.$$

6. Знайдіть загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння II порядку.

$$y'' + 4y' + 13y = 0.$$

Варіант 23

1. Розв'яжіть систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \text{ якщо:}$$

$$a_{11} = 1, \quad a_{12} = -1, \quad a_{21} = -4, \quad a_{22} = 1$$

2. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння.

$$dy = \sin 12x \cos 6x dx.$$

3. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння.

$$(1+x^2)y' + xy = 0, \quad y(0) = 4.$$

4. Знайдіть загальний розв'язок лінійного рівняння I порядку.

$$y' - \frac{xy}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2}.$$

5. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння II порядку.

$$y'' = e^{3x} + \sin 5x.$$

6. Знайдіть загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння II порядку.

$$y'' - 2y' + 10y = 0.$$

*Варіант 24*

1. Розв'яжіть систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \quad \text{якщо:}$$

$$a_{11} = 0, \quad a_{12} = 2, \quad a_{21} = 2, \quad a_{22} = 0$$

2. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння.

$$dy = \cos 11x \cos 2x dx.$$

3. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння.

$$dy + y \tan x dx = 0, \quad y(0) = 1.$$

4. Знайдіть загальний розв'язок лінійного рівняння I порядку.

$$y' - y \cdot \cos x = \sin 2x.$$

5. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння II порядку.

$$y'' = e^{3x} + \cos 5x.$$

6. Знайдіть загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння II порядку.

$$y'' - 10y' + 9y = 0.$$

*Варіант 25*

1. Розв'яжіть систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \quad \text{якщо:}$$

$$a_{11} = 1, \quad a_{12} = 2, \quad a_{21} = 4, \quad a_{22} = 3$$

2. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння.

$$dy = \sin 8x \sin 3x dx.$$

3. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння.

$$y dx + x \tan y dy = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1.$$

4. Знайдіть загальний розв'язок лінійного рівняння I порядку.

$$y' + y \cdot \frac{1 + \cos x}{x + \sin x} = 1.$$

5. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння II порядку.

$$y'' = e^{2x} + \sin 8x.$$

6. Знайдіть загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння II порядку.

$$y'' - 12y' + 11y = 0.$$

*Варіант 26*

1. Розв'яжіть систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \text{ якщо:}$$

$$a_{11} = 2, \quad a_{12} = 5, \quad a_{21} = -1, \quad a_{22} = 4$$

2. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння.

$$dy = \cos 5x \cos 8x dx.$$

3. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння.

$$y^2 + x^2 y' = 0, \quad y(-1) = 1.$$

4. Знайдіть загальний розв'язок лінійного рівняння I порядку.

$$y' + y \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

5. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння II порядку.

$$y'' = e^{8x} + \cos 6x.$$

6. Знайдіть загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння II порядку.

$$2y'' - 3y' + y = 0.$$

*Варіант 27*

1. Розв'яжіть систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \text{ якщо:}$$

$$a_{11} = 1, \quad a_{12} = -1, \quad a_{21} = -4, \quad a_{22} = 1$$

2. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння.

$$dy = \sin 6x \cos 4x dx.$$

3. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння.

$$2(1 + e^x)y y' = e^x, \quad y(0) = 0.$$

4. Знайдіть загальний розв'язок лінійного рівняння I порядку.

$$y' + y \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{1}{x^2}.$$

5. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння II порядку.

$$y'' = e^{7x} + \sin 3x.$$

6. Знайдіть загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння II порядку.

$$y'' - 6y' + 5y = 0.$$

*Варіант 28*

1. Розв'яжіть систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \text{ якщо:}$$

$$a_{11} = 0, a_{12} = 2, a_{21} = 2, a_{22} = 0$$

2. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння.

$$dy = \cos 4x \cos 13x dx.$$

3. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння.

$$(1+y)dx = (1-x)dy, y(-2) = 3.$$

4. Знайдіть загальний розв'язок лінійного рівняння I порядку.

$$y' + \frac{xy}{x^2 - 1} = 1.$$

5. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння II порядку.

$$y'' = e^{4x} + \cos 4x.$$

6. Знайдіть загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння II порядку.

$$y'' + 7y' - 8y = 0.$$

*Варіант 29*

1. Розв'яжіть систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \text{ якщо:}$$

$$a_{11} = 1, a_{12} = 2, a_{21} = 4, a_{22} = 3$$

2. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння.

$$dy = \sin 13x \cos 3x dx.$$

3. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння.

$$(1+x)ydx + (1-y)xdy = 0, y(1) = 1.$$

4. Знайдіть загальний розв'язок лінійного рівняння I порядку.

$$y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x}.$$

5. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння II порядку.

$$y'' = e^{7x} + \sin 2x.$$

6. Знайдіть загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння II порядку.

$$5y'' + 2y' - 7y = 0.$$

*Варіант 30*

1. Розв'яжіть систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \text{ якщо:}$$

$$a_{11} = 2, \quad a_{12} = 5, \quad a_{21} = -1, \quad a_{22} = 4$$

2. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння.

$$dy = \sin 16x \sin 2x dx.$$

3. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння.

$$y^2 dx = e^x dy, \quad y(0) = 1.$$

4. Знайдіть загальний розв'язок лінійного рівняння I порядку.

$$y' - \frac{y}{x} = -\frac{2 \ln x}{x}.$$

5. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння II порядку.

$$y'' = e^{4x} + \cos 3x.$$

6. Знайдіть загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння II порядку.

$$3y'' - 5y' - 8y = 0.$$

## КОНТРОЛЬ 2

### ВАРІАНТ 1.

1. Постановка крайової задачі для звичайних диференціальних рівнянь

2. Розв'яжіть методом кінцевих різниць крайову задачу

$y'' + x^2 y' + (1 - x)y = x/(x^2 + 3)$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 0$ , з числом розбиття відрізка  $n=25$ . Побудуйте графік отриманого розв'язку.

3. Розв'язати задачі Коші для тривимірного хвильового рівняння

$u_{tt} = a^2 \Delta u(t, x, y, z)$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in E_3$ , з початковими умовами:

$$u(0, x, y, z) = \begin{cases} u_0 = \text{const}, & r \leq r_0, \\ 0, & r > r_0, \end{cases} \quad u_t(0, x, y, z) = 0;$$

### ВАРІАНТ 2.

1. Метод кінцевих різниць для лінійних диференціальних рівнянь другого порядку

2. Розв'яжіть методом кінцевих різниць нелінійне диференціальне рівняння другого порядку  $y'' - 2xy' - 2y^2 = -4x$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 3.7$  з числом розбиття відрізка  $n = 20$ . Побудуйте графік отриманого розв'язку.

3. Розв'язати задачі Коші для тривимірного хвильового рівняння

$u_{tt} = a^2 \Delta u(t, x, y, z)$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in E_3$ ,

з початковими умовами:  $u(0, x, y, z) = 0$ ,  $u_t(0, x, y, z) = \begin{cases} u_0 = \text{const}, & r \leq r_0, \\ 0, & r > r_0, \end{cases}$

де  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $r_0 = \text{const} > 0$ .

### ВАРІАНТ 3.

1. Метод кінцевих різниць для нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку

2. Розв'язати методом кінцевих різниць крайову задачу  $x^2 y'' + xy' = 1$ ,  $y(1) = 0$ ,  $y(1.4) = 0,05661$  з числом розбиття відрізка  $n = 10$ .

3. Із розв'язку задачі Коші

$u_{tt} = a^2 \Delta u \pm c^2 u(t, x, y) + f(t, x, y)$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y) \in E_2$ ,

$u(0, x, y) = \varphi(x, y)$ ,  $u_t(0, x, y) = \psi(x, y)$ ,  $(x, y) \in E_2$ ,

методом спуску одержати розв'язок задачі

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \pm c^2 u(t, x) + f(t, x), \quad t > 0, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

### ВАРІАНТ 4.

1. Постановки крайових задач для рівнянь з частинними похідними.

2. Розв'язати методом кінцевих різниць крайову задачу

$y'' = (1 - xy)/x^2$ ,  $y(1) = 0$ ,  $y(1.4) = 0,05661$ , з числом розбиття відрізка  $n = 10$ .



3. Довести, що для існування в рівнянні

$$u_{tt}(t, M) = a^2 \Delta u(t, M) + cu(t, M), \quad M = M(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

плоских хвиль  $u(t, M) = f\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i - bt\right)$ , де  $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$ , довільної форми,

які поширюються зі швидкістю  $a$  в довільних напрямках, необхідно й досить, щоб  $c = 0$ ;

#### ВАРІАНТ 5.

1. Гармонійні функції та єдиність розв'язку задачі Діріхле для рівняння Лапласа.

2. Проінтегрувати ДРЧП  $u_{xx} - 4u_{xy} + 3u_{yy} - 2u_x + 6u_y(x, y) = 0$ ;

3. Довести, що при  $c \neq 0$  в рівнянні (25) існують плоскі хвилі довільних напрямків поширення і довільних швидкостей, за виключенням  $a$ , однак їх форма не може бути довільною, а є розв'язком диференціального рівняння

$$(a^2 - b^2)f''(Q) + cf(Q) = 0, \quad Q = \sum_{i=1}^n a_i x_i - bt.$$

#### ВАРІАНТ 6.

1. Різницеві схеми для рівняння Лапласа.

2. Проінтегрувати ДРЧП  $u_{xx} + 6u_{xy} + 5u_{yy}(x, y) = 0$ ;

3. Знайти функцію  $u(x, y)$ , гармонійну в області  $G = \{(x, y): x > 0, y > 0, x + y < 1\}$ , яка на межі  $\Gamma$  цієї області задовольняє умову  $u|_{\Gamma} = x^2 + y^2$ .

#### ВАРІАНТ 7.

1. Метод сіток для розв'язування задачі Діріхле.

2. Методом Монте-Карло знайти значення  $u(0,4;0,2)$  гармонійної в області  $G = \{(x, y): x > 0, y > 0, x + y < 1\}$  функції  $u(x, y)$ , яка на межі  $\Gamma$  цієї області задовольняє умову  $u|_G = x^2 + y^2$ .

3. Розв'язати методом прямих рівняння  $\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = x + y$  в області  $Q = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ , якщо

$$\{u(x, 0) = 0, u(x, 1) = x + 1, 0 \leq x \leq 1,$$

$$\{u(0, y) = y, u(1, y) = y, 0 \leq y \leq 1.$$

#### ВАРІАНТ 8.

1. Ітераційний процес Лібмана.

2. Проінтегрувати ДРЧП  $u_{xx} - 2 \sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_y(x, y) = 0$ ;

3. Розв'язати методом сіток рівняння  $\partial^2 u / \partial x^2 = \partial u / \partial t$  з початковими та крайовими умовами

$$\{u(x, 0) = 4x(x + 3), 0 \leq x \leq 3,$$

$$\{u(0, t) = 0, u(3, t) = 0, 0 \leq t \leq \infty.$$

#### ВАРІАНТ 9.

1. Розв'язування задачі Діріхле методом моделювання.

2. Проінтегрувати ДРЧП  $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} - 2u_y(x, y) = 0$ ,  $xy > 0$ ;

3. Розв'язати методом прямих рівняння  $\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = x + y$  в області  $Q = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ , якщо  
 $\{u(x, 0) = 0, u(x, 1) = x + 1, 0 \leq x \leq 1,$   
 $\{u(0, y) = y, u(1, y) = y, 0 \leq y \leq 1.$

### ВАРІАНТ 10.

1. Метод Монте-Карло.

2. Проінтегрувати ДРЧП  $3u_{xx} - 5u_{xy} - 2u_{yy} + 3u_x + u_y(x, y) = 2$ ;

3. Розв'язати методом сіток рівняння  $\partial^2 u / \partial x^2 = \partial u / \partial t$  з початковими та крайовими умовами

$$\{u(x, 0) = 4x(x + 3), 0 \leq x \leq 3,$$

$$\{u(0, t) = 0, u(3, t) = 0, 0 \leq t \leq \infty.$$

### ВАРІАНТ 11.

1. Метод сіток для рівняння теплопровідності.

2. Проінтегрувати ДРЧП

$$x^2 u_{xx} - 2x u_{xy} + y^2 u_{yy} + x u_x + y u_y(x, y) = 0, \quad y \neq 0;$$

3. Розв'язати методом прямих рівняння

$$\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = x + y$$

в області  $Q = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$ , якщо

$$\{u(x, 0) = 0, u(x, 2) = x + 2, 0 \leq x \leq 2,$$

$$\{u(0, y) = y, u(2, y) = 2y, 0 \leq y \leq 2.$$

### ВАРІАНТ 12.

1. Метод алгебраїчної прогонки для рівняння теплопровідності.

2. Проінтегрувати ДРЧП  $u_{xy} - 2u_x - 3u_y + 6u(x, y) = 2e^{x+y}$ .

3. Розв'язати методом сіток рівняння  $\partial^2 u / \partial x^2 = \partial u / \partial t$  з початковими та крайовими умовами

$$\{u(x, 0) = 4x(x + 3), 0 \leq x \leq 3,$$

$$\{u(0, t) = 0, u(3, t) = 0, 0 \leq t \leq \infty.$$

### ВАРІАНТ 13.

1. Інший підхід до наближеного розв'язування рівняння теплопровідності.

2. Знайти розв'язки задач Коші:

$$u_{xx} + 2 \cos x u_{xy} - \sin^2 x u_{yy} - \sin x u_y(x, y) = 0,$$

$$u(x, \sin x) = \varphi(x), \quad u_y(x, \sin x) = \psi(x);$$

3. Розв'язати методом прямих рівняння  $\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = x + y$  в області  $Q = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ , якщо

$$\begin{cases} u(x,0)=0, u(x,1)=x+1, 0 \leq x \leq 1, \\ u(0,y)=y, u(1,y)=y, 0 \leq y \leq 1. \end{cases}$$

#### ВАРІАНТ 14.

1. Метод сіток для хвильового рівняння.
2. Знайти розв'язки задач Коші:
3. Розв'язати методом прямих рівняння

$$\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = x + y$$

в області  $Q = \{(x,y): 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$ , якщо

$$\{u(x,0) = 0, u(x,2) = x + 2, 0 \leq x \leq 2,$$

$$\{u(0,y) = y, u(2,y) = 2y, 0 \leq y \leq 2.$$

#### ВАРІАНТ 15.

1. Метод прямих
2. Знайти розв'язки задач Коші:

$$4y^2 u_{xx} + 2(1 - y^2) u_{xy} - u_{yy} - \frac{2y}{1 + y^2} (2u_x - u_y) = 0, \quad u = u(x, y),$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_y(x,0) = \psi(x);$$

3. Розв'язати методом прямих рівняння  $\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = x + y$  в області  $Q = \{(x,y): 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3\}$ , якщо

$$\{u(x,0) = 0, u(x,3) = x + 3, 0 \leq x \leq 3,$$

$$\{u(0,y) = y, u(3,y) = 3y, 0 \leq y \leq 3.$$

#### ВАРІАНТ 16.

1. Модифікація для рівняння Пуассона.
2. Знайти розв'язки задач Коші:

$$x^2 u_{xx} - 2xy u_{xy} - 3y^2 u_{yy} = 0, \quad u = u(x, y),$$

$$u(x,1) = x, \quad u_y(x,1) = 1;$$

3. Розв'язати методом прямих рівняння  $\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = x + y$  в області  $Q = \{(x,y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ , якщо

$$\{u(x,0) = 0, u(x,1) = x + 1, 0 \leq x \leq 1,$$

$$\{u(0,y) = y, u(1,y) = y, 0 \leq y \leq 1.$$

#### ВАРІАНТ 17.

1. Постановка крайової задачі для звичайних диференціальних рівнянь
2. Розв'яжіть методом кінцевих різниць крайову задачу  $y'' + x^2 y' + (1 - x)y = x / (x^2 + 3)$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 0$ , з числом розбиття відрізка  $n=25$ . Побудуйте графік отриманого розв'язку.

3. Розв'язати задачі Коші для тривимірного хвильового рівняння

$$u_{tt} = a^2 \Delta u(t, x, y, z), \quad t > 0, \quad (x, y, z) \in E_3, \quad \text{з початковими умовами:}$$

$$u(0, x, y, z) = \begin{cases} u_0 = \text{const}, & r \leq r_0, \\ 0, & r > r_0, \end{cases} \quad u_t(0, x, y, z) = 0;$$

### ВАРІАНТ 18.

1. Метод кінцевих різниць для лінійних диференціальних рівнянь другого порядку

2. Розв'яжіть методом кінцевих різниць нелінійне диференціальне рівняння другого порядку  $y'' - 2xy' - 2y^2 = -4x$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 3.7$  з числом розбиття відрізка  $n = 20$ . Побудуйте графік отриманого розв'язку.

3. Розв'язати задачі Коші для тривимірного хвильового рівняння

$$u_{tt} = a^2 \Delta u(t, x, y, z), \quad t > 0, \quad (x, y, z) \in E_3,$$

$$\text{з початковими умовами: } u(0, x, y, z) = 0, \quad u_t(0, x, y, z) = \begin{cases} u_0 = \text{const}, & r \leq r_0, \\ 0, & r > r_0, \end{cases}$$

$$\text{де } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad r_0 = \text{const} > 0.$$

### ВАРІАНТ 19.

1. Метод кінцевих різниць для нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку

2. Розв'язати методом кінцевих різниць крайову задачу  $x^2 y'' + xy' = 1$ ,  $y(1) = 0$ ,  $y(1.4) = 0,05661$  з числом розбиття відрізка  $n = 10$ .

3. Із розв'язку задачі Коші

$$u_{tt} = a^2 \Delta u \pm c^2 u(t, x, y) + f(t, x, y), \quad t > 0, \quad (x, y) \in E_2,$$

$$u(0, x, y) = \varphi(x, y), \quad u_t(0, x, y) = \psi(x, y), \quad (x, y) \in E_2,$$

методом спуску одержати розв'язок задачі

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \pm c^2 u(t, x) + f(t, x), \quad t > 0, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

### ВАРІАНТ 20.

1. Постановки крайових задач для рівнянь з частинними похідними.

2. Розв'язати методом кінцевих різниць крайову задачу

$y'' = (1 - xy)/x^2$ ,  $y(1) = 0$ ,  $y(1.4) = 0,05661$ , з числом розбиття відрізка  $n = 10$ .

3. Довести, що для існування в рівнянні  $u_{tt}(t, M) = a^2 \Delta u(t, M) + cu(t, M)$ ,  $M = M(x_1, x_2, \dots, x_n)$  плоских хвиль

$u(t, M) = f\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i - bt\right)$ , де  $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$ , довільної форми, які поширюються зі

швидкістю  $a$  в довільних напрямках, необхідно й досить, щоб  $c = 0$ ;

### ВАРІАНТ 21.

1. Гармонійні функції та єдиність розв'язку задачі Діріхле для рівняння Лапласа.

2. Проінтегрувати ДРЧП  $u_{xx} - 4u_{xy} + 3u_{yy} - 2u_x + 6u_y(x, y) = 0$ ;

3. Довести, що при  $c \neq 0$  в рівнянні (25) існують плоскі хвилі довільних напрямків поширення і довільних швидкостей, за виключенням  $a$ , однак їх форма не може бути довільною, а  $\epsilon$  розв'язком диференціального рівняння

$$(a^2 - b^2)f''(Q) + cf(Q) = 0, \quad Q = \sum_{i=1}^n a_i x_i - bt.$$

### ВАРІАНТ 22.

1. Різницеві схеми для рівняння Лапласа.
2. Проінтегрувати ДРЧП  $u_{xx} + 6u_{xy} + 5u_{yy}(x, y) = 0$ ;
3. Знайти функцію  $u(x, y)$ , гармонійну в області  $G = \{(x, y): x > 0, y > 0, x + y < 1\}$ , яка на межі  $\Gamma$  цієї області задовольняє умову  $u|_{\Gamma} = x^2 + y^2$ .

### ВАРІАНТ 23.

1. Метод сіток для розв'язування задачі Діріхле.
2. Методом Монте-Карло знайти значення  $u(0,4;0,2)$  гармонійної в області  $G = \{(x, y): x > 0, y > 0, x + y < 1\}$  функції  $u(x, y)$ , яка на межі  $\Gamma$  цієї області задовольняє умову  $u|_G = x^2 + y^2$ .
3. Проінтегрувати ДРЧП  $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} - 2u_y(x, y) = 0, \quad xy > 0$ ;

### ВАРІАНТ 24.

1. Метод Монте-Карло.
2. Проінтегрувати ДРЧП  $3u_{xx} - 5u_{xy} - 2u_{yy} + 3u_x + u_y(x, y) = 2$ ;
3. Розв'язати методом прямих рівняння  $\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = x + y$  в області  $Q = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ , якщо
 
$$\{u(x, 0) = 0, u(x, 1) = x + 1, 0 \leq x \leq 1,$$

$$\{u(0, y) = y, u(1, y) = y, 0 \leq y \leq 1.$$

### ВАРІАНТ 25.

1. Метод сіток для рівняння теплопровідності.
2. Проінтегрувати ДРЧП
 
$$x^2 u_{xx} - 2x u_{xy} + y^2 u_{yy} + x u_x + y u_y(x, y) = 0, \quad y \neq 0;$$
3. Розв'язати методом прямих рівняння  $\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = x + y$  в області  $Q = \{(x, y): 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$ , якщо
 
$$\{u(x, 0) = 0, u(x, 2) = x + 2, 0 \leq x \leq 2,$$

$$\{u(0, y) = y, u(2, y) = 2y, 0 \leq y \leq 2.$$

### ВАРІАНТ 26.

1. Метод алгебраїчної прогонки для рівняння теплопровідності.
2. Проінтегрувати ДРЧП  $u_{xy} - 2u_x - 3u_y + 6u(x, y) = 2e^{x+y}$ .
3. Розв'язати методом прямих рівняння  $\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = x + y$  в області  $Q = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ , якщо
 
$$\{u(x, 0) = 0, u(x, 1) = x + 1, 0 \leq x \leq 1,$$

$$\{u(0,y)=y, u(1,y)=y, 0 \leq y \leq 1.$$

**ВАРІАНТ 27.**

1. Інший підхід до наближеного розв'язування рівняння теплопровідності.

2. Знайти розв'язки задач Коші:

$$u_{xx} + 2 \cos x u_{xy} - \sin^2 x u_{yy} - \sin x u_y(x, y) = 0, \quad u(x, \sin x) = \varphi(x), \quad u_y(x, \sin x) = \psi(x);$$

3. Розв'язати методом сіток рівняння  $\partial^2 u / \partial x^2 = \partial u / \partial t$  з початковими та крайовими умовами

$$\{u(x, 0) = 4x(x+3), 0 \leq x \leq 3,$$

$$\{u(0, t) = 0, u(3, t) = 0, 0 \leq t \leq \infty.$$

**ВАРІАНТ 28.**

1. Метод сіток для хвильового рівняння.

2. Знайти розв'язки задач Коші:

3. Проінтегрувати ДРЧП  $u_{xx} - 2 \sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_y(x, y) = 0;$

**ВАРІАНТ 29.**

1. Метод прямих

2. Знайти розв'язки задач Коші:

$$4y^2 u_{xx} + 2(1-y^2) u_{xy} - u_{yy} - \frac{2y}{1+y^2} (2u_x - u_y) = 0, \quad u = u(x, y),$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_y(x, 0) = \psi(x);$$

3. Розв'язати методом прямих рівняння  $\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = x+y$  в області  $Q = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3\}$ , якщо

$$\{u(x, 0) = 0, u(x, 3) = x+3, 0 \leq x \leq 3,$$

$$\{u(0, y) = y, u(3, y) = 3y, 0 \leq y \leq 3.$$

**ВАРІАНТ 30.**

1. Модифікація для рівняння Пуассона.

2. Знайти розв'язки задач Коші:

$$x^2 u_{xx} - 2x u_{xy} - 3y^2 u_{yy} = 0, \quad u = u(x, y),$$

$$u(x, 1) = x, \quad u_y(x, 1) = 1;$$

3. Проінтегрувати ДРЧП  $u_{xx} - 2 \sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_y(x, y) = 0;$

## 4 ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

### Розподіл годин

Форма навчання	Кредитів ECTS	Годин	Аудиторних годин				Самост. робота	Розподіл за семестрами		
			Лекції	Практичні	Лабораторні	Всього		Екзамени	Заліки	ДЗ
Денна/заочна		20	6	8		4	6			

### Мета та завдання навчальної дисципліни

**Мета вивчення дисципліни.** *Навчальна дисципліна «Вибрані питання теорії диференціальних рівнянь» є одним з курсів професійної підготовки, що закладає фундамент підготовки молодих викладачів.*

**Головною його метою** є засвоєння різних підходів до розв'язання практичних обчислювальних задач і розуміння теоретичних основ вибраних питань теорії диференціальних рівнянь.

**Основне завдання курсу** полягає у підготовці фахівця до використання математичних методів у роботі в умовах освітнього процесу та технологічного прогресу.

Отже, навчання дисципліни сприяє формуванню професійної компетентності випускника, яка поєднує у собі математичні знання майбутнього вчителя, його психолого-педагогічну та методичну підготовку, особистісні якості, формує здатність організувати навчально-виховний процес на рівні сучасних вимог. А саме, у процесі вивчення дисципліни студент має здобути наступні компетентності:

#### **Програмні компетентності**

#### **Загальні компетентності**

**ЗК 1 Аналіз і синтез:** здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.

**ЗК 2 Практична робота:** розуміння предметної області та професійної діяльності, здатність застосовувати професійні знання у практичних ситуаціях, аналізувати, досліджувати та презентувати свій досвід.

**ЗК 3 Творчість та інновації:** здатність створювати та передавати нові ідеї, генерувати інноваційні рішення відомих проблем або дослідницьких ситуацій.

**ЗК 5 Інформаційні технології:** засвоєння нових знань, оволодіння сучасними інформаційними технологіями.

### ***Фахові компетентності***

**ФК 1 Фундаментальні знання та розуміння:** здатність використовувати системні знання з фундаментальної математики, економіки та методик їх навчання, фундаментальні знання змісту шкільного курсу математики сучасної школи.

**ФК 2 Професійні навички:** здатність застосовувати сучасні методи й освітні технології навчання, аналізувати особливості сприйняття та засвоєння учнями і студентами навчальної інформації з метою прогнозу ефективності та корекції освітнього процесу.

**ФК 4 Вирішення проблем:** здатність застосовувати сучасні математико-статистичні методи та пакети комп'ютерної математики до створення і аналізу математичних моделей реальних задач і процесів.

**ФК 5 Інформаційні освітні технології:** здатність до використання сучасних методів навчання, пов'язаних із використанням ІКТ і STEM технологій: мультимедійне навчання; комп'ютерне програмоване навчання; інтерактивне навчання; дистанційне навчання; використання Інтернет-технологій.

**ФК 8 Альтернативна освіта:** здатність здійснювати аналіз та корекцію знань та умінь учнів в умовах диференційованого навчання, здатність ефективно планувати та організовувати різні форми неформальної освіти.

### ***Завдання вивчення дисципліни***

Завдання вивчення дисципліни визначаються програмними результатами навчання, а саме випускник магістратури має опанувати:

ПРН 1. Знання та розуміння основ навчальних дисциплін фундаментального циклу.

ПРН 3. Знання, що відносяться до базових областей математики та економіки, в обсязі достатньому для успішної роботи у наукових групах.

ПРН 4. Спеціалізовані концептуальні знання, набуті у процесі навчання та/або професійної діяльності на рівні новітніх досягнень, які є основою для оригінального мислення та інноваційної діяльності, зокрема в контексті дослідницької роботи за освітньою програмою.

ПРН 5. Будувати математичні моделі, алгоритмізувати розв'язування математичної задачі.

ПРН 9. Використовувати бібліографічний пошук, аналіз та інтерпретацію математичних текстів і статей методичного характеру, зокрема із використанням новітніх ІКТ.

ПРН 10. Організовувати пошук відповідних наукових джерел, які мають безпосереднє відношення до фундаментальної математики та актуальних проблем методики її навчання, в тому числі з використанням іноземної мови.

ПРН 12. Аналізувати основні підходи, теорії та концепції предметного циклу дисциплін з математики та економіки з урахуванням існуючих міжпредметних зв'язків.



ПРН 13. Мати уявлення про сучасний математичний апарат, який застосовують в природничих науках, інженерних та економічних дослідженнях.

ПРН 14. Проводити наукові дослідження під керівництвом наукового консультанта-наставника.

ПРН 15. Модифікувати та створювати нові освітні та бізнес-проекти за допомогою ІКТ; передбачати нові освітні потреби і запити.

ПРН 16. Вибирати та відслідковувати найновіші досягнення в певній області математики, економіки або методики навчання математики, взаємодіючи спілкуючись із колегами.

ПРН 17. Зрозуміло і недвозначно доносити власні висновки, а також знання та пояснення, що їх обґрунтовують, до фахівців і нефахівців, зокрема до осіб, які навчаються.

ПРН 19. Усвідомлювати необхідність подальшого навчання, вивчення, аналізу, узагальнення та поширення передового педагогічного досвіду, систематично підвищувати свою професійну кваліфікацію

### ***Теоретичні знання***

Студент повинен знати:

- ✓ Типи диференціальних рівнянь I-го порядку.
- ✓ Типи диференціальних рівнянь вищих порядків.
- ✓ Метод кінцевих різниць для лінійних диференціальних рівнянь другого порядку
- ✓ Метод кінцевих різниць для нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку
- ✓ Постановки крайових задач для рівнянь з частинними похідними.
- ✓ Гармонійні функції та єдиність розв'язку задачі Діріхле для рівняння Лапласа.
- ✓ Різницеві схеми для рівняння Лапласа.
- ✓ Метод сіток для розв'язування задачі Діріхле.
- ✓ Ітераційний процес Лібмана.
- ✓ Нелінійні елементи й нелінійні характеристики
- ✓ Фундаментальні ефекти, до яких приводить нелінійність
- ✓ Нелінійний осцилятор як узагальнена модель теорії коливань
- ✓ Нелінійний осцилятор: фазовий портрет
- ✓ Приклади автоколивальних систем

### ***Практичні уміння та навички***

Студент повинен уміти:

застосовувати теоретичні знання та практичні навички з дисципліни до розв'язування загальних і прикладних задач та у практичній діяльності фахівця.

**Міждисциплінарні зв'язки:** хмарні технології та STEM-освіта, елементарна математика, математичний аналіз, ІКТ (комп'ютерна

математика), диференціальні рівняння, економіко-математичні методи та моделі.

### **Змістовий модуль 1.**

Чисельні методи теорії крайових задач

1. Узагальнення диференціальних рівнянь I-го порядку.
2. Застосування диференціальних рівнянь I-го порядку.
3. Узагальнення диференціальних рівнянь вищих порядків.
4. Застосування диференціальних рівнянь вищих порядків.
5. Узагальнення систем диференціальних рівнянь.
6. Постановка крайової задачі. Метод кінцевих різниць для лінійних диференціальних рівнянь другого порядку
7. Метод кінцевих різниць для нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку
8. Постановки крайових задач для рівнянь з частинними похідними.
9. Гармонійні функції та єдиність розв'язку задачі Діріхле для рівняння Лапласа.
- 10.Різницеві схеми для рівняння Лапласа.
- 11.Метод сіток для розв'язування задачі Діріхле.
- 12.Ітераційний процес Лібмана.

### **Змістовий модуль 2.**

Теорія коливань

- 13.Про предмет теорії коливань
- 14.Нелінійні елементи й нелінійні характеристики
- 15.Фундаментальні ефекти, до яких приводить нелінійність
- 16.Нелінійний осцилятор як узагальнена модель теорії коливань
- 17.Нелінійний осцилятор: фазовий портрет
- 18.Приклади автоколивальних систем

**Формулювання спеціальних результатів із їх розподілом за модулями представлені нижче:**

Модулі	Зміст програмного результату навчання
Чисельні методи теорії крайових задач	<p>Здобувач вищої освіти здатний</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.</li> <li>✓ до розуміння предметної області та професійної діяльності, застосовувати професійні знання у практичних ситуаціях, аналізувати, досліджувати та презентувати свій досвід.</li> <li>✓ створювати та передавати нові ідеї, генерувати інноваційні рішення відомих проблем або дослідницьких ситуацій.</li> <li>✓ Взаємодіяти у групі, оцінювати та забезпечувати якість виконуваних робіт.</li> <li>✓ до засвоєння нових знань, оволодіння сучасними</li> </ul>

Модулі	Зміст програмного результату навчання
	<p>інформаційними технологіями.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ проводити самооцінку та аналіз власних досягнень, здатність до самоосвіти та вдосконалення професійних навичок.</li> <li>✓ приймати активну участь в поліпшенні стану довкілля, забезпечення здоров'я та гармонійного розвитку людини з високим рівнем якості, зокрема забезпечення охорони життя і здоров'я учнів та студентів у освітньому процесі та поза аудиторній діяльності.</li> <li>✓ використовувати системні знання з фундаментальної математики, економіки та методик їх навчання, фундаментальні знання змісту шкільного курсу математики сучасної школи.</li> <li>✓ застосовувати сучасні методи й освітні технології навчання, аналізувати особливості сприйняття та засвоєння учнями і студентами навчальної інформації з метою прогнозу ефективності та корекції освітнього процесу.</li> <li>✓ здійснювати психолого-педагогічний супровід процесу навчання, проектувати цілісний освітній процес навчання, виховання та самовдосконалення учнів.</li> <li>✓ застосовувати сучасні математико-статистичні методи та пакети комп'ютерної математики до створення і аналізу математичних моделей реальних задач і процесів.</li> <li>✓ до використання сучасних методів навчання, пов'язаних із використанням ІКТ і STEM технологій: мультимедійне навчання; комп'ютерне програмоване навчання; інтерактивне навчання; дистанційне навчання; використання Інтернет-технологій.</li> <li>✓ спілкуватися державною та іноземною мовами у відповідності до професійної ситуації</li> </ul>
Теорія коливань	<p><i>Здобувач вищої освіти здатний</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.</li> <li>✓ до розуміння предметної області та професійної діяльності, застосовувати професійні знання у практичних ситуаціях, аналізувати, досліджувати та презентувати свій досвід.</li> <li>✓ створювати та передавати нові ідеї, генерувати інноваційні рішення відомих проблем або дослідницьких ситуацій.</li> </ul>

Модулі	Зміст програмного результату навчання
	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ взаємодіяти у групі, оцінювати та забезпечувати якість виконуваних робіт.</li> <li>✓ до засвоєння нових знань, оволодіння сучасними інформаційними технологіями.</li> <li>✓ проводити самооцінку та аналіз власних досягнень, здатність до самоосвіти та вдосконалення професійних навичок.</li> <li>✓ застосовувати сучасні методи й освітні технології навчання, аналізувати особливості сприйняття та засвоєння учнями і студентами навчальної інформації з метою прогнозу ефективності та корекції освітнього процесу.</li> <li>✓ до використання сучасних методів навчання, пов'язаних із використанням ІКТ і STEM технологій: мультимедійне навчання; комп'ютерне програмоване навчання; інтерактивне навчання; дистанційне навчання; використання Інтернет-технологій.</li> <li>✓ спілкуватися державною та іноземною мовами у відповідності до професійної ситуації</li> </ul>

### Структура та технологічна карта навчальної дисципліни

#### Технологічна карта навчальної дисципліни

на 1 семестр Види занять		Всього	Навчальні тижні																	
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Аудиторні	Лекції	<b>36</b>	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	Практичні	<b>18</b>	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	Лабораторні																			
	Індивідуальні																			
	Поточ. контр.				+									+						
	Контр.роб									+								+		
	Модул. контр								M1								M2			
	Захист курсов																			
	Захист лабор.																			
	Консультації																			
	Атестації										A1									
	Всього	<b>54</b>	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3

Самостійні	Курс. проект.																		
	Підгот. до зан	66	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
	Розрах.-граф.																		
	Консультації																		
	Екскурсії																		
	Всього	66	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
Навчальне навантаження студентів	1206	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	

**Підсумковий контроль – залік**

**Структура навчальної дисципліни**

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин				
	денна форма навчання				
	усього	у тому числі			
л		п	с.р.	Література	
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>
<b>Змістовий модуль 1.</b>					
<b>ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ ТЕОРІЇ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ</b>					
1. Узагальнення диференціальних рівнянь I-го порядку.	6	2	1	3	[11] §1
2. Застосування диференціальних рівнянь I-го порядку.	6	2	1	3	[11] §1
3. Узагальнення диференціальних рівнянь вищих порядків.	6	2	1	3	[11] §2
4. Застосування диференціальних рівнянь вищих порядків.	6	2	1	3	[11] §2
5. Узагальнення систем диференціальних рівнянь.	6	2	1	3	[11] §4
6. Постановка крайової задачі. Метод кінцевих різниць для лінійних диференціальних рівнянь другого порядку	6	2	1	3	[11] §7

<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>
7. Метод кінцевих різниць для нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку	7	2	1	4	[11] §8
8. Постановки крайових задач для рівнянь з частинними похідними.	7	2	1	4	[3] §1.1
9. Гармонійні функції та єдиність розв'язку	7	2	1	4	[3]

<i>задачі Діріхле для рівняння Лапласа.</i>					§1.2
10. <i>Різницеві схеми для рівняння Лапласа.</i>	7	2	1	4	[3] §2.1
11. <i>Метод сіток для розв'язування задачі Діріхле.</i>	7	2	1	4	[3] §2.2
12. <i>Ітераційний процес Лібмана.</i>	7	2	1	4	[3] §2.3
<b>Разом за змістовим модулем 1</b>	<b>78</b>	<b>24</b>	<b>12</b>	<b>42</b>	
<b>ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2. ТЕОРІЯ КОЛИВАНЬ</b>					
13. <i>Про предмет теорії коливань</i>	7	2	1	4	[6] §1
14. <i>Нелінійні елементи й нелінійні характеристики</i>	7	2	1	4	[6] §12
15. <i>Фундаментальні ефекти, до яких приводить нелінійність</i>	7	2	1	4	[6] §3
16. <i>Нелінійний осцилятор як узагальнена модель теорії коливань</i>	7	2	1	4	[6] §4
17. <i>Нелінійний осцилятор: фазовий портрет</i>	7	2	1	4	[6] §5
18. <i>Приклади автоколивальних систем</i>	7	2	1	4	[6] §11
<b>Разом за змістовим модулем 2</b>	<b>42</b>	<b>12</b>	<b>6</b>	<b>24</b>	
<b>Усього годин</b>	<b>120</b>	<b>36</b>	<b>18</b>	<b>66</b>	

Самостійна робота

Уміння студентів самостійно працювати над вивченням конкретного предмета – важливий чинник підвищення якості підготовки спеціалістів.

Самостійна робота студента (денна форма навчання) включає підготовку до практичних занять; самостійне опрацювання додаткової літератури та питань для самоконтролю засвоєння змісту навчального матеріалу, а також підготовку рефератів, есе, доповідей та самостійних домашніх (творчих) завдань за тематикою, що наведено у методичних вказівках до самостійної роботи – Режим доступу: <http://www.dgma.donetsk.ua/metodichne-zabezpechennya-osvitno-profesiyna-programa-serednya-osvita-matematika.html>

Враховуючи це, рекомендуються наступні **форми організації самостійної роботи студентів**: підготовка до практичних занять; самостійне опрацювання додаткової літератури до тем лекційного курсу і практичних (семінарських) занять, а також літератури для підготовки самостійного домашнього завдання; підготовка доповідей, рефератів та есе за тематикою лекцій і семінарів; самостійне опрацювання питань для самоконтролю засвоєння змісту лекційного матеріалу з курсу.

**Перелік тем для самостійного вивчення**

1. Узагальнення диференціальних рівнянь I-го порядку та вищих порядків.

2. Узагальнення систем диференціальних рівнянь.
3. Постановка крайової задачі. Метод кінцевих різниць для лінійних диференціальних рівнянь другого порядку.
4. Метод кінцевих різниць для нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку. Постановки крайових задач для рівнянь з частинними похідними.
5. Гармонійні функції та єдиність розв'язку задачі Діріхле для рівняння Лапласа. Різницеві схеми для рівняння Лапласа.
6. Метод сіток для розв'язування задачі Діріхле.
7. Ітераційний процес Лібмана. Про предмет теорії коливань
8. Нелінійні елементи й нелінійні характеристики
9. Фундаментальні ефекти, до яких приводить нелінійність
10. Нелінійний осцилятор як узагальнена модель теорії коливань
11. Нелінійний осцилятор: фазовий портрет. Приклади автоколивальних систем

#### Розрахунок часу для самостійної роботи студента за видами

№ з/п	Вид роботи	Кількість годин
1	Опрацювання програмного матеріалу, що викладається на лекціях	10
2	Підготовка до практичних занять	10
3	Виконання індивідуальних завдань (рефератів, творчих, розрахунково-графічних робіт, презентацій тощо)	10
4	Підготовка до контрольних заходів (модульна контрольна робота)	20
5	Підготовка самостійного домашнього завдання	16
	<b>Разом</b>	<b>66</b>

**Самостійна робота виконується у відповідності до методичних вказівок до самостійної роботи студента.**

#### **. ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ**

Метою індивідуального завдання є ґрунтовне усвідомлення суттєвих властивостей основних понять курсу, закріплення основних теорем та формування практичних вмінь студентів.

Виконання індивідуального завдання передбачає розв'язання студентами задач з посібника [20] за наступними темами:

1. Узагальнення диференціальних рівнянь I-го порядку та вищих порядків.
2. Узагальнення систем диференціальних рівнянь.
3. Постановка крайової задачі. Метод кінцевих різниць для лінійних диференціальних рівнянь другого порядку

4. *Метод кінцевих різниць для нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку. Постановки крайових задач для рівнянь з частинними похідними.*
5. *Гармонійні функції та єдиність розв'язку задачі Діріхле для рівняння Лапласа. Різницеві схеми для рівняння Лапласа.*
6. *Метод сіток для розв'язування задачі Діріхле.*
7. *Ітераційний процес Лібмана. Про предмет теорії коливань*
8. *Нелінійні елементи й нелінійні характеристики*
9. *Фундаментальні ефекти, до яких приводить нелінійність*
10. *Нелінійний осцилятор як узагальнена модель теорії коливань*
11. *Нелінійний осцилятор: фазовий портрет. Приклади автоколивальних систем*

### **Методи навчання**

Підвищенню ефективності вивчення курсу сприяє використання системи евристичного навчання. Перевагу слід надати наступним формам навчання:

- а) лекції: інформативні, аналітичні, проблемні;
- б) евристичний семінар, практичні, лабораторні заняття, тренінги.

Доцільні методи навчання: мозкові атаки, метод проектів, евристичні бесіди та ін.

**Критерії оцінювання.** Критерієм успішного проходження підсумкового оцінювання є досягнення мінімального порогового балу. Оцінювання навчальних досягнень студентів здійснюється на основі використання модульно-рейтингової системи оцінювання. Розподіл балів за різними видами робіт та шкала оцінювання представлені у таблиці 9.

**Засоби оцінювання.** Засоби оцінювання та методи демонстрування результатів навчання за даним курсом є усні опитування на практичних та лекційних заняттях, тестові завдання, реферати, доповіді, есе, індивідуальні завдання, письмові контрольні роботи.

### **Розподіл балів, які отримують студенти**

Від заняття або контрольного заходу	Балів за одно заняття або контрольний захід	За семестр		До 1-й атестації	
		кількість занять або контрольних заходів	сума балів	кількість занять або контрольних заходів	сума балів
Індивідуальне завдання	20	2	40	1	20
Підготовка реферату	20	1	20	-	-
Модул. контр.	20	2	40	1	20
Всього			100		40



За участь у науковій роботі, вивчення спеціальної літератури і поглиблене вивчення курсу студенту можуть призначатися додаткові бали, але не більше ніж 10 балів.

### Шкала оцінювання

Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка за національною шкалою	
	для екзамену, курсового проекту (роботи), практики	для заліку
90 – 100	відмінно	зараховано
74-89	добре	
55-73	задовільно	
0-54	незадовільно	не зараховано

### Рекомендовані інформаційні джерела

#### Базова

1. Гой Т.П., Казмерчук А.І., Федак І.В. Звичайні диференціальні рівняння. Частина. 1. Диференціальні рівняння першого порядку, які інтегруються у квадратурах. – Івано-Франківськ: ЛІК, 2005. – 120 с.
2. Гой Т.П., Копач М.І., Федак І.В. Курс лекцій з навчальної дисципліни "Наближені методи розв'язування диференціальних рівнянь" Івано-Франківськ.– 2008.
3. Гой Т.П., Копач М.І., Федак І.В. Числові методи розв'язування крайових задач. Курс лекцій. Івано-Франківськ.– 2008.
4. Ляшенко Б.М., Кривонос О.М., Вакалюк Т.А. Методи обчислень: навчально-методичний посібник для студентів фізико-математичного факультету. – Житомир: Вид-во ЖДУ, 2014. – 228 с., іл.
5. Ляшко І.І., Боярчук О.К., Гай Я.Г., Калайда О.Ф. Диференціальні рівняння. – К.: Вища школа, 1981. – 504 с.
6. Лященко М.Я., Головань М.С. Чисельні методи. – К.: Либідь, 1996. – 288 с.
7. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння. – 2-ге видання: Київ: Либідь, 2003. – 600 с.
8. Чуйко С. М. *Лекції з теорії імпульсних крайових задач. Друге видання.* – Слов'янськ: – 2010. – 210 с.
9. Шкіль М.І., Лейфура В.М., Самусенко П.Ф. Диференціальні рівняння. – К.: Техніка, 2003. – 368 с.

#### Допоміжна

10. Жалдак М.І., Рамський Ю.С. Чисельні методи математики. Посібник для вчителів. –Київ: Рад. шк. –1984. - 206 с.

### **Методичне забезпечення**

11. Дзюба М. В. , Карпенко Л. М. , Черскова О. В. Диференціальні рівняння та їх системи. Збірник індивідуальних завдань: Навч. посібник для студентів вузів.– Слов'янськ, 2017.
12. Дзюба М. В. Конспект лекцій «Вибрані питання теорії диференціальних рівнянь»– Слов'янськ, 2020.
13. Дзюба М. В. Методичні вказівки до самостійної роботи з навчальної дисципліни «Вибрані питання теорії диференціальних рівнянь»– Слов'янськ, 2020.

### **Інформаційні ресурси**

14. «ИНТУИТ»-освітній проект, учбові курси з тематик комп'ютерних наук, інформаційних технологій, математики, фізики, економіки та інших наук.
15. <http://www.exponenta.ru/default.asp> Мова(російська). Розв'язки задач у математичних пакетах Mathcad, Matlab, Maple, Mathematica, Statistica та інших.
16. <https://www.youtube.com/watch?v=p1JKXbW5eTU> Мова(російська). Курс відеолекцій

### **Література**

1. Гой Т.П., Копач М.І., Федак І.В. Числові методи розв'язування крайових задач. Курс лекцій. Івано-Франківськ.– 2008
2. Ляшко І.І., Боярчук О.К., Гай Я.Г., Калайда О.Ф. Диференціальні рівняння. – К.: Вища школа, 1981. – 504 с.

**НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ**

**Методичні вказівки  
до практичних занять та самостійної роботи  
з дисципліни  
«Вибрані питання теорії диференціальних рівнянь»  
для студентів спеціальності 014 «Середня освіта (Математика)»**

Укладач      Дзюба М.В.

Редактор      Ініціали Прізвище

Комп'ютерна верстка      О. П. Ордіна

Підп. до друку      . Формат 60 x 84/16.  
Папір офсетний. Розум. друк. арк.      Обл.-вид. арк.  
Тираж      прим. Зам. №

Видавець і виготівник  
«Донбаська державна машинобудівна академія»  
84313, м. Краматорськ, вул. Шкадінова, 72.  
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи  
до Державного реєстру  
серія ДК №1633 від 24.12.03.